Varianta 012

Subiectul I

a) $AB = \sqrt{2}$

b) $\cos^2 201 + \sin^2 201 = 1$

c) Aria este $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

d) Daca $z = -2 + 5 \cdot i$ atunci $\bar{z} = -2 - 5 \cdot i$

e) Se obține soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

f) $\sqrt{13}$.

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 64 + 49 = 113$

b) Probablitatea cerută este $\frac{3}{5}$

c) $3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

d)Din definiția logaritmului se obține $x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$.

e) $E = C_5^1 - C_5^4 = C_5^1 - C_5^1 = 0$.

2.

a) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -2$

c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 (\forall) x \in (0, \infty) \Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

d) $\int_1^2 f(x)dx = (x - \frac{1}{x})\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+3}{3n+2} = \frac{1}{3}$

Subiectul III

a) $0 = 0 + 0 \cdot \omega$ si $1 = 0 + 1 \cdot \omega$ deci $0 \in M, 1 \in M$.

b) $\omega^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} - 1 = 4(2 - \sqrt{3}) - 1 = 4\omega - 1$

c) Fie $z, x \in M \Rightarrow (\exists) a, a', b, b' \in Z$ cu $z = a + b\omega$ si $y = a' + b'\omega$

Am $z+y=(a+a')+(b+b')\omega\in M$ si

$z\cdot y=a\cdot a'+(a\cdot b'+a'\cdot b)\omega+b\cdot b'\omega^2=a\cdot a'+(a\cdot b'+a'\cdot b)\omega+b\cdot b'(4\omega-1)=(a\cdot a'-b\cdot b')+(a\cdot b'+a'\cdot b+4b'b)\omega\in M$.

d) $(a+b\omega)(a+b\overline{\omega})=a^2+b^2\omega\overline{\omega}+ab(\omega+\overline{\omega})=a^2+b^2+4ab\in Z$ caci $a,b\in Z$

e) $\omega=0+1\cdot\omega\in M$, $\overline{\omega}=4-\omega\in M$ si cum $\omega\overline{\omega}=1$ rezultă $\omega\in G$.

f) Deoarece $\omega\in G$ rezultă $\omega\cdot\omega=\omega^2\in G$ si prin inducție $\omega^n\in G(\forall)n\in N^*$. Atunci $\{\omega,\omega^2,...,\omega^{2006}\}\subset G$ si $\omega^i\neq\omega^j\,(\forall)i\neq j$. Deci G conține cel puțin 2006 elemente.

g) $\omega^{2006}=(2-\sqrt{3})^{2006}=C_{2006}^{0}2^{2006}+C_{2006}^{2}2^{2004}\cdot3+...+C_{2006}^{2006}3^{1003}-\sqrt{3}(C_{2006}^{1}2^{2005}+C_{2006}^{3}2^{2003}\cdot3+...+C_{2006}^{2005}2\cdot3^{1002})=a-b\sqrt{3}$

cu $b\neq0$ şi a,b$\in Q$; deci $\omega^{2006}\notin Q$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=3\cdot e^{3x}$

b) $f'(x)>0(\forall)x\in R\Rightarrow f$ strict crescătoare pe R.

c) deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2\Rightarrow y=2$ asimptota orizontala.

d) $\int_0^1 f(x)dx=(\frac{e^{3x}}{3}+2x)\Big|_0^1=\frac{e}{3}+2-\frac{1}{3}=\frac{e}{3}+\frac{5}{3}$.

e)Deoarece $u(t)=t^2+t+1$ este funcite de gradul al II-lea cu Δ=1-4<0 ea are semnul coeficientului lui t^2 adica $u(t)>0$; analog pentru t^2-t+1.

f) $\frac{1}{2}\left[(f'(x))^2+f'(x)+1\right]-\frac{1}{2}\left[(f'(x))^2-f'(x)+1\right]=\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}=f'(x)$

g) Fie g,h: $R\to R$ $g(x)=2+2\cdot e^{3x}$ si $h(x)=e^{3x}$.

Am $g'(x)=6e^{3x}>0$, $h'(x)=3e^{3x}>0$ adica g si h sunt strict crescătoare si evident $f(x)=g(x)-h(x)$.